Interessantes und Amüsantes aus der Welt der Mathematik

von

Dr. Gunter Berauer

Vortrag anlässlich des 103. Stiftungsfestes der

Technischen Verbindung Borussia Magdeburg zu Krefeld

am 24. Oktober 2009

Vortrag Stiftungsfest 09.ppt

Gliederung

I. Aus der Welt der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Über Töchter, Ziegen und Schießereien

II. Aus der Welt der Logik
Über Kinder mit schmutzigen Gesichtern

III. Aus der Welt der Ästhetik
Über Weihnachtssterne und den goldenen Schnitt

IV. Aus der Welt des Sports
Über die Mathematik des Fußballs

V. Aus der Welt der Geometrie
Über Zylinder- und Möbiusbänder

Folien zugänglich auf: www.berauer.org unter Folien Krefeld 10/09

I. Aus der Welt der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Über Töchter, Ziegen und Schießereien

- Wahrscheinlichkeit
  - Maß für die „Stärke“ oder „Sicherheit“, mit der ich etwas annehmen kann, oder Chance für etwas, das ich nicht sicher weiß
- Würfel
  - WK für eine der 6 Zahlen: für jede = 1/6
  - WK für eine Gerade Zahl: = 1/2 oder 50%
  - WK dafür, dass keine 6 fällt: = 5/6
- Wofür brauchen Menschen den Begriff
  - Um in unsicheren Lebenslagen zu entscheiden
- Beispiele siehe die folgenden Seiten

Töchter: *Wie groß ist die Chance, dass ein Ehepaar mit zwei Kindern zwei Töchter hat?*

Wenn

Fall 1: Ich sonst nichts weiß

Fall 2: Ich eines der Kinder schon einmal gesehen und als Mädchen identifiziert habe

Fall 3: Ich weiß, dass eines ein Mädchen namens Erika ist

- Hintergrundwissen:
  Chance für ein Mädchen und Jungen bei einer Geburt je 50 %
- Grundsätzliches Vorgehen:
  - *Alle Kombinationen hinschreiben: Anzahl Ng*
  - *Die auszählen mit zwei Mädchen: Anzahl Nm*
  - *WK = Nm / Ng*

Fall 1: Ich weiß sonst nichts

- Tabelle der möglichen Kombinationen
  - Erstgeborenes / Zweitgeborenes:

Erstgeborenes:	J	J	M	M
Zweitgeborenes:	J	M	J	M

  - Wahrscheinlichkeit = 1/4

Die Chance, dass das Paar zwei Mädels hat, ist 25%

Fall 2: Ich weiß, dass eines ein Mädchen ist

- Tabelle der möglichen Kombinationen
  - Erstgeborenes / Zweitgeborenes:

Erstgeborenes:	~~J~~	J	M	M
Zweitgeborenes:	~~J~~	M	J	M

  - WK = 1/3

Die Chance, dass das Paar zwei Mädels hat, ist 33%

Fall 3: Ich weiß, dass eines eine Erika ist

- Tabelle der möglichen Kombinationen
  Erika (E) kann entweder Erst- oder Zweitgeborene sein

  - Erstgeborenes:
    Zweitgeborenes:

Erstgeborenes:	***E***	***E***	J	M
Zweitgeborenes:	J	M	***E***	***E***
	Erika ist ***Erstgeborene***		*Erika ist* ***Zweitgeborene***	

Die Chance, dass das Paar zwei Mädels hat, ist 50%

Das Ziegenproblem
oder: wo ist der Ferrari ?

- Hinter einem der Tore steht ein Ferrari
- Hinter den anderen beiden je eine Ziege
- Chance bei Wahl eines Tores den Ferrari zu gewinnen = 1/3

Meine Wahl Tor 1

Moderator öffnet Tor 3:
(Inhalt eine Ziege)

?

Frage des Moderators: Wollen Sie nun auf Tor 2 wechseln?

Oder: Erhöht sich die WK durch Wechsel oder bleibt sie bei 1/3 ????

Wechseln oder Nichtwechseln ?
das ist hier die Frage

- Angenommene Verteilung:

Tor 1	Tor 2	Tor 3

- Möglichkeiten:

Meine Wahl war	*Moderator öffnet*	*Wechseln gut?*
Tor 1	Tor 2	***ja***
Tor 2	Tor 1	***ja***
Tor 3	Tor 1 oder 2	***nein***

Durch den Wechsel erhöht sich die Chance für den Ferrari
von 1/3 auf 2/3

Schießereien: Das Triell von Santa Monica

Old Jim
Treffsicherheit 1/3

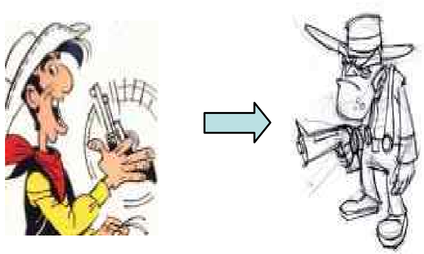
John
Treffsicherheit 2/3

Lucky
Treffsicherheit 1

- Wer im Triell übrig bleibt, kann den Goldklumpen behalten
- Spielregeln:
  - Man schießt nacheinander, d.h. sequentiell, nicht gleichzeitig
  - Der schlechteste Schütze hat den ersten Schuss, also Reihenfolge:
  - ***Jim***, dann ***John*** (wenn er noch lebt), dann ***Lucky*** (wenn er noch lebt), dann ***Jim*** (wenn er noch lebt), dann ***John*** (wenn er noch lebt), ……

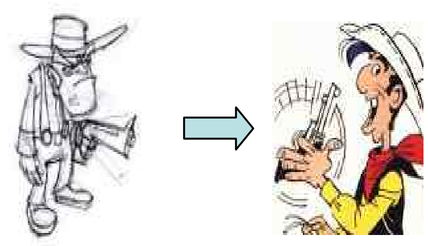
Frage: Was soll Jim als Erstschütze machen ?????

Jedes Triell endet mit einer Zweiersituation A ⇨ B oder „Sequentialduell“ (A hat den ersten Schuss)



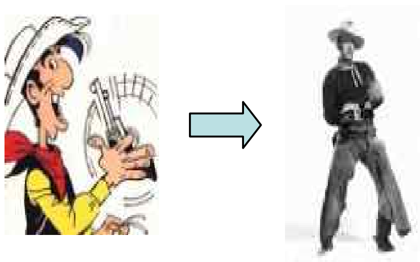
1 : 0

Ein Schuss, Jim tot



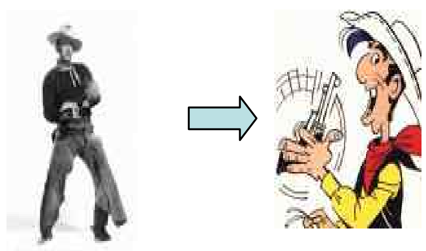
1/3 : 2/3

Maximal zwei Schuss



1 : 0

Ein Schuss, John tot

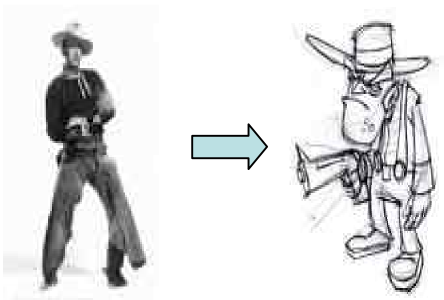


2/3 : 1/3

Maximal zwei Schuss

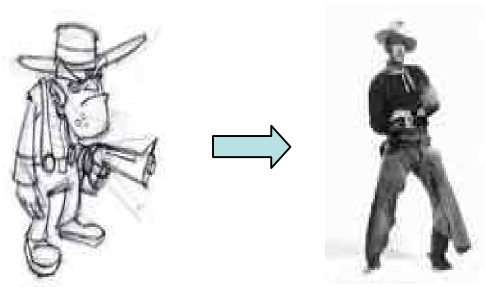
Rote Zahlen: Überlebenswahrscheinlichkeiten

Weitere „Sequentialduelle"



Können beliebig
viele Schüsse werden,
aufsummierte Überlebens-WK:

John: 6/7
Jim: 1/7



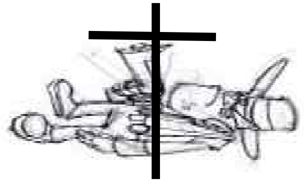
Können beliebig
viele Schüsse werden,
aufsummierte Überlebens-WK:

John: 4/7
Jim: 3/7

Auf wen soll Jim seinen ersten Schuss richten ?

Mögliche Ergebnisse des ersten Schusses

- *Möglichkeit 1* für Jims ersten Schuss
  - ***Jim trifft John***
  - Dann schießt Lucky auf Jim, d.h Jim ist tot
  - D.h. Überlebenschance für Jim = ***0***



mausetot

- *Möglichkeit 2* für Jims ersten Schuss
  - ***Jim trifft Lucky***
  - Dann folgt Sequentialduell John auf Jim, Jims Überlebenschance **= *1/7***

ziemlich tot

Mögliche Ergebnisse des ersten Schusses

- *Möglichkeit 3:* ***Jim trifft KEINEN***
  - Dann schießt John auf Lucky: **2/3** Chance dass er ihn trifft
    Bei Fehlschuss (**1/3** Chance): Lucky erschießt John
  - Dann hat Jim den ersten Schuss in Zweiersituationen
    - *gegen **John***: Überlebenschance **3/7**
    - *gegen **Lucky***: Überlebenschance **1/3**
  - D.h. mittlere Überlebenschance für Jim:
    Wü = **2/3** x **3/7** + **1/3** x **1/3** = 25/63 ≈ ***40 %***

ziemlich
lebendig

Optimale Strategie für Jim:
In die Luft schießen

- Überlebenschancen der anderen:
  John: ≈ ***38%*** Lucky: ≈ ***22%*** (der beste Schütze !)

Fazit Wahrscheinlichkeitsrechung

Die Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung helfen uns

1. Sachverhalte einschätzen
2. Gewinnen
3. Überleben

II. Aus der Welt der Logik

Über Kinder mit schmutzigen Gesichtern

Kurt
(schmutzig)

Armin
(schmutzig)

Renate
(sauber)

- Kurt, Armin, Renate kommen vom Spielen heim
- Kurt u. Armin haben ein schmutziges Gesicht
- Keines weiß über den Zustand seines eigenen Gesichtes
- Der Vater empfängt sie an der Haustür

Über Kinder mit schmutzigen Gesichtern

- ***Vater:***
  „Mindestens eines von Euch dreien hat ein schmutziges Gesicht“
  „Wer von Euch dreien weiß, dass es schmutzig ist?“
- ***Alle drei unisono:***
  „Ich weiß es nicht“
- ***Vater erneut:***
  „Weiß es jetzt einer?“
- ***Kurt und Armin unisono:***
- *„Ja, ich bin schmutzig“*

Woher wussten Kurt und Armin plötzlich
um den Schmutz in ihren Gesichtern ?????

Woher die plötzliche Erleuchtung von Kurt und Armin ?

- **Kurts Gedanken:**
  Wenn ich sauber wäre, ….

Annahme:
ich, Kurt, wäre sauber

Armin sähe
dann 2 saubere
Gesichter

Renate
(sauber)

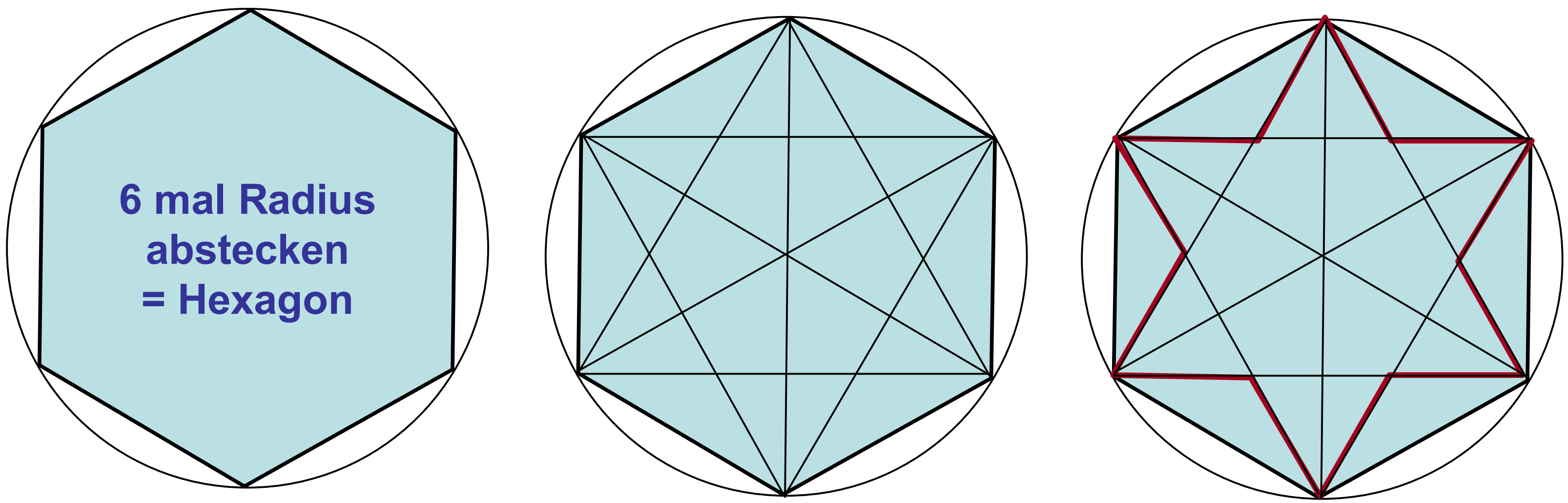
- *Da aber mindesten ein Gesicht schmutzig sein soll,*
  hätte dann Armin wissen müssen, dass er schmutzig ist !!
- *Da er aber nichts gesagt hat,* ***muss ich schmutzig sein***
- *Die selben Gedanken hat Armin, also weiß er jetzt auch, dass er schmutzig ist*

Fazit Logik

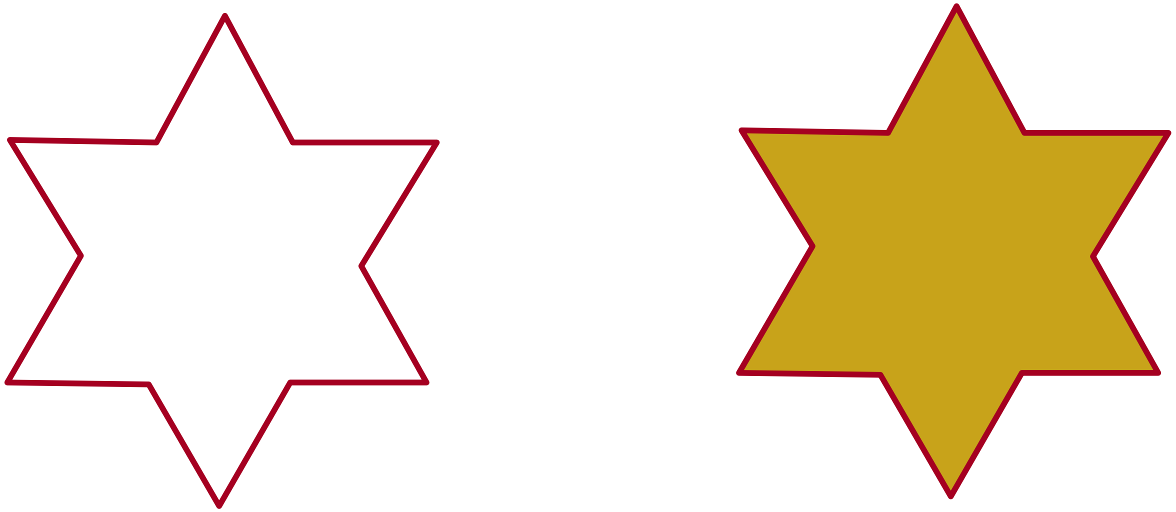
Aus der Beobachtung des Verhaltens anderer Menschen kann man oft Erkenntnisse über sich selbst gewinnen

III. Aus der Welt der Ästhetik
Über Weihnachtssterne und den goldenen Schnitt

- Weihnachtssterne
  - Vier-, fünf-, sechs-, achteckige
  - Die meisten sind sechs- oder fünfeckig
- *Konstruktion eines sechseckigen Sterns*



Weiter: Konstruktion eines sechseckigen Sterns

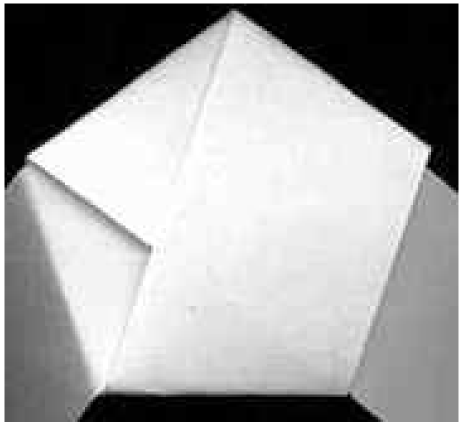


- Andere Methode: Zwei gleichseitige Dreiecke übereinander kleben
- Sechsecke in der Natur: Bienenwaben, Schneeflocken, Eiskristalle

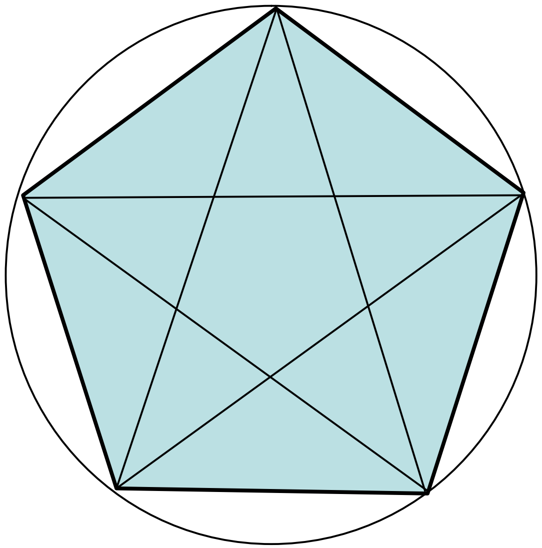
Der fünfeckige Stern

- <u>Konstruktion eines fünfeckigen Sterns</u>

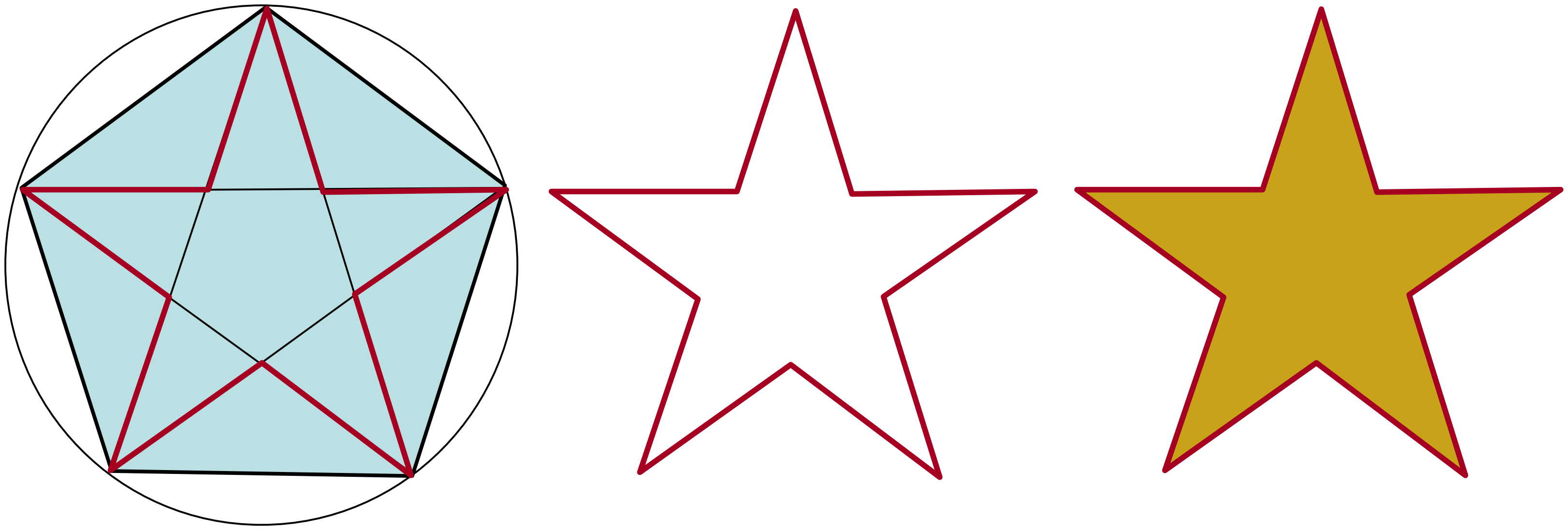
oder



Papierstreifenmethode



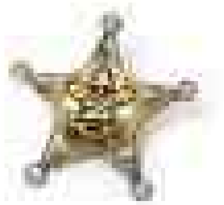
Weiter: Konstruktion eines fünfeckigen Sterns

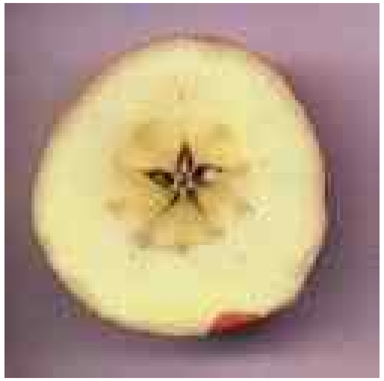


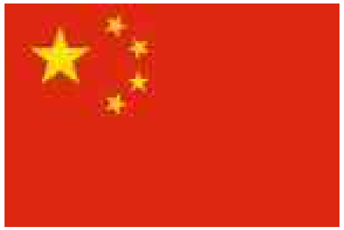
Fertig ist der Weihnachtsstern

Vorkommen fünfeckiger Sterne

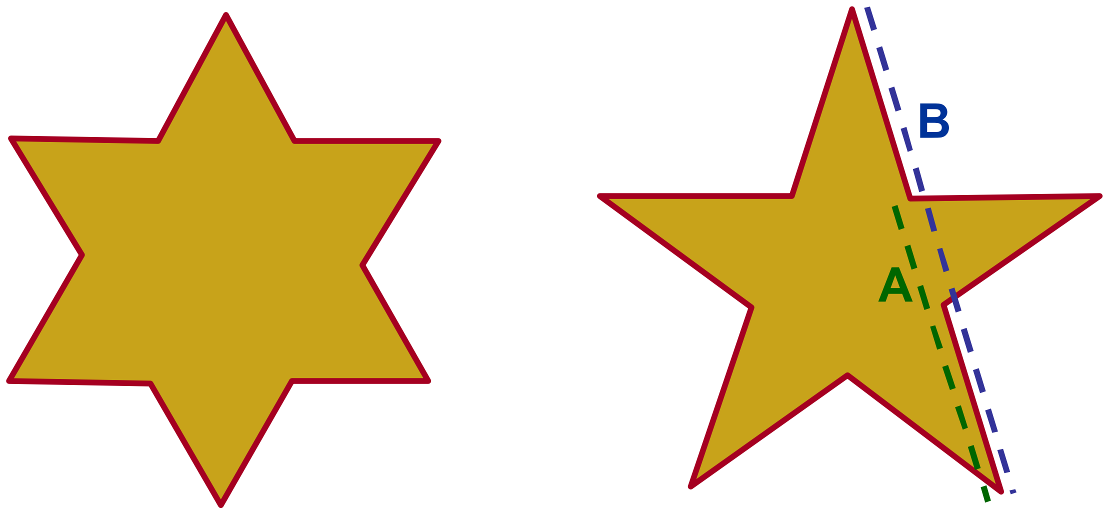
- Manche Sheriff-Sterne
- Sternfrucht
- Apfelgehäuse
- Sterne in Flaggen
- Pentagon in Washington
- Weihnachtssterne





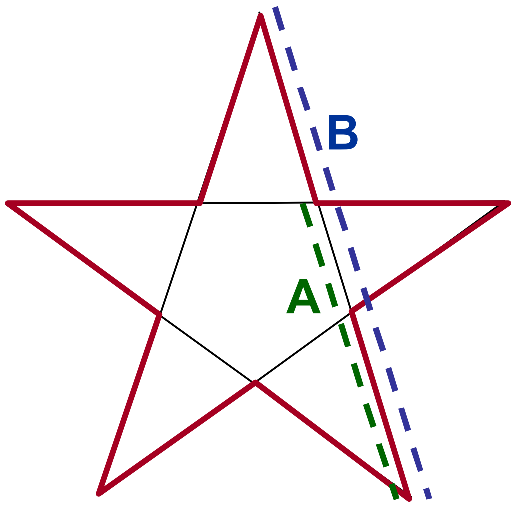


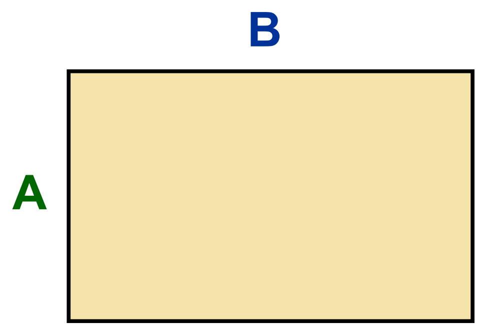
Warum ist der fünfeckige Stern so schön ????



- Antwort: Weil in ihm der Goldene Schnitt verkörpert ist

Der Goldene Schnitt





B/A = Φ = 1,6180…..

(irrationale Zahl)

Φ definiert, wenn die innere gleich äußeren Teilung ist:

$$B/A = (B + A)/B$$
$$x = 1 + 1/x;\ x^2 = 1 + x$$
$$x = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2$$
$$= 1{,}6180\ldots..$$

Dieses Verhältnis empfinden viele Mensch als besonders schön, als ideale Proportion

Andere Berechnungsweisen

oder: viele Wege führen zum goldenen Schnitt

- Der ***Kehrwertweg***
  1. Wähle eine ***beliebige*** Zahl
  2. Bilde ihren Kehrwert und addiere die Zahl 1
  3. Wiederhole Schritt 2 immer wieder

*Beispiel Startwert **2***

2 ⇒ 1,5 ⇒ 1,67 ⇒ 1,6 ⇒ 1,625 ⇒ 1,615 ⇒ 1,619 ⇒ 1,618 ⇒ 1,6182 ⇒ 1,6180

- Der ***Wurzelweg***
  1. Wähle eine ***beliebige*** (positive) Zahl
  2. Addiere die Zahl 1 und ziehe daraus die Wurzel
  3. Wiederhole Schritt 2 immer wieder

*Beispiel Startwert **5***

5 ⇒ 2,45 ⇒ 1,86 ⇒ 1,69 ⇒ 1,64 ⇒ 1,625 ⇒ 1,62 ⇒ 1,6187 ⇒ 1,6182 ⇒ 1,6180

Andere Berechnungsweisen

oder: viele Wege führen zum Goldenen Schnitt

- Der ***Reihenweg***
  1. Wähle zwei beliebige Zahlen
  2. Bilde daraus eine Reihe, in der jedes neue Glied die Summe der letzten beiden ist
  3. Bilde den Quotient aus benachbarten Gliedern

Beispiel Startwerte 3 und 9

Reihe und Quotienten

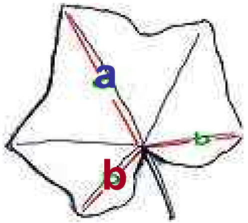
$3 \Rightarrow 9 \Rightarrow 12 \Rightarrow 21 \Rightarrow 33 \Rightarrow 54 \Rightarrow 87 \Rightarrow 141 \Rightarrow 228 \Rightarrow 369 \Rightarrow 597 \Rightarrow 966$

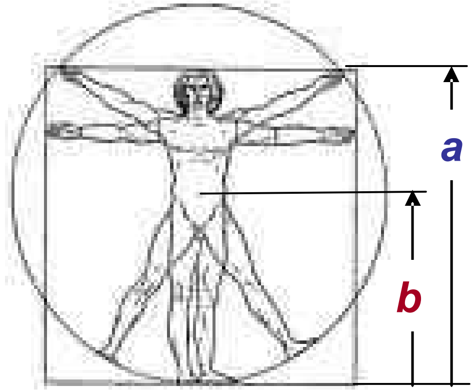
3 1,33 1,75 1,57 1,636 1,611 1,621 1,617 1,6184 1,6179 1,6180

(Bei den Startwerten 0,1 ergibt sich die Fibonacci-Reihe)

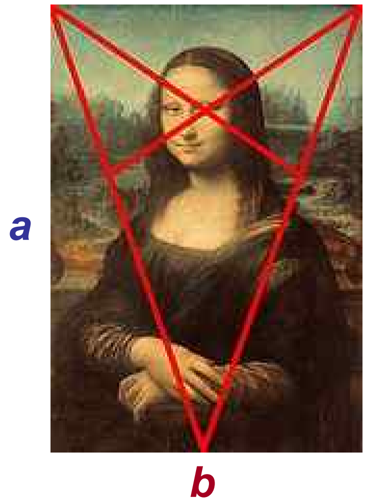
Vorkommen des Goldenen Schnitts

- Antike Architektur (Parthenon, Pantheon)
- Bildkomposition (Mona Lisa)
- Moderne Kunst (z.B. Hombroich bei Neuß)
- Nabelhöhe beim Menschen (grob)
- Efeublatt (grob)
- Experimentelle Musik („goldene“ Frequenzverhältnisse)





$a/b \approx \Phi$



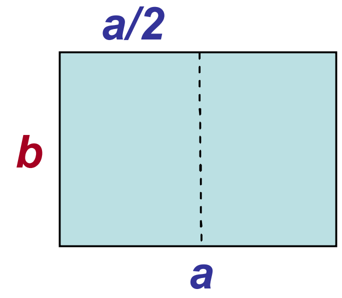
Papier- und Bildformate

- Goldener Schnitt nur selten vertreten
- Gängige Formate Postbereich
  - *Briefmarke 160mm : 120mm = 1,33*
  - *Post-/ Ansichtskarte 14,8 : 10,5 = 1,41*
    Post-/ Ansichtskarte 14,8 : 10,1 = 1,47
    Post-/ Ansichtkarte 16,5 : 10,4 = ***1,59***
- Gängige Foto-, Bildschirm-, TV-Formate
  - *Fotos 13 : 9 = 1,44*
    Fotos 15 : 10 = 1,5
    Fotos 15 : 9 = ***1,67***
  - *Klassisches TV u. Kino 4 : 3 = 1,33*
  - *Breitwandkino = 1,875*
  - *HDTV 16 : 9 = 1,78*
- Typische Papierformate
  - *US- Letter 11 : 8,5 = 1,29*
  - *US Ledger 17 : 11 =* ***1,55***
  - *Papieformate DIN A und B = 1,414 = √2*

Aber: Zentralwert etwa goldener Schnitt

Grund für DIN-Formate:

Halbierte Seiten sollen das Format beibehalten



$a : b = b : a/2$
$(a/b)^2 = 2$

$\boxed{a/b = \sqrt{2}}$

Fazit Ästhetik

„Ideale“ Proportionen

1. *lassen sich aus einfachen geometrischen Gebilden (Sternen) ableiten, sie haben interessante mathematische Eigenschaften*
2. *sind in der Natur und in der menschlichen Lebenswelt in der Regel nur grob realisiert; erstaunlich gut aber bei Mittelwerten*
3. *werden subjektiv unterschiedlich empfunden;*
   d.h. nicht jeder empfindet den goldenen Schnitt als besonders schön. Ich schon ……

IV. Aus der Welt des Sports

Über die Mathematik des Fußballs

- Klassischer Fußball: Fünfecke und Sechsecke

- Fragen an den Fußball
  - Wie viele schwarze Fünfecke und weiße Sechsecke hat er?
  - Wie viele Ecken und Kanten gibt es?
  - Hängen diese Zahlen von der Größe des Balls ab?
- Wie kann ich diese Fragen beantworten?

- Was sind die Unbekannten:
  - Anzahl der schwarzen Fünfecke = **S**
  - Anzahl der weißen Sechsecke = **W**
  - Anzahl der Ecken = **E**
  - Anzahl der Kanten = **K**

Zur Lösung sind vier Gleichungen nötig

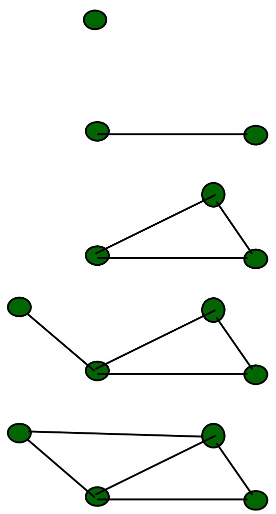
Die Fußball-Gleichungen

- Euler (1707-83) -Charakteristik:
  Für jeden Graphen mit E Ecken, K Kanten und F Flächen gilt

$$\boxed{E - K + F = 2}$$

Beim Fußball: F = S + W

Beweis



$1 - 0 + 1 = 2$

$2 - 1 + 1 = 2$

$3 - 3 + 2 = 2$

$4 - 4 + 2 = 2$

$4 - 5 + 3 = 2$

Gilt für unbegrenzte und einfach geschlossene Flächen

Weitere Fußballgleichungen

- Jede Kante gehört zu ***zwei*** Flächen:

  $(5S + 6W)/2 = K$

- Jede Ecke gehört zu ***drei*** Flächen:

  $(5S + 6W)/3 = E$

- Jede ***zweite*** Kante eines Sechsecks grenzt an ein Fünfeck:

  $\frac{1}{2}\, 6W = 5S$

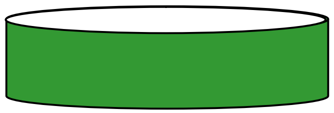
- Plus Euler-Charakteristrik:

  $E - K + S + W = 2$

Lösung:
$S = 12 \quad W = 20$
$E = 60 \quad K = 90$
Wichtig: gilt für jeden Ball jeder Größe und jeder Form

V. Aus der Welt der Geometrie

Über Zylinder- und Möbiusbänder



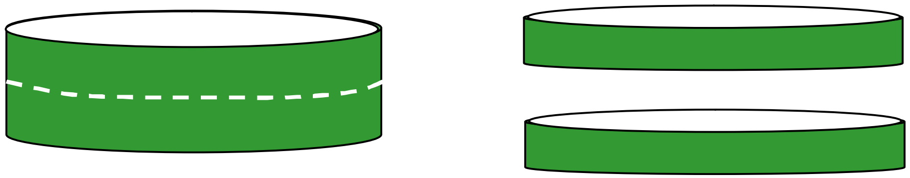
Zylinderband

Möbiusband *)

- Zylinderband
  - Zwei Kanten, eine oben eine unten
  - Zwei Seiten, eine innen, eine außen
- Möbiusband
  - Nur eine einzige Kante
  - Nur eine einzige Seite

*) Mathematiker 1790 - 1868

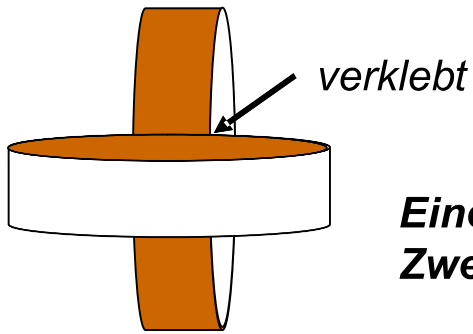
Experimente mit Zylinderbändern



- Längs aufschneiden
- Ergebnis des Aufschneidens:
  - Zwei Zylinder
  - Zusammen 2 x 2 = 4 Seiten und 2 x 2 = 4 Kanten

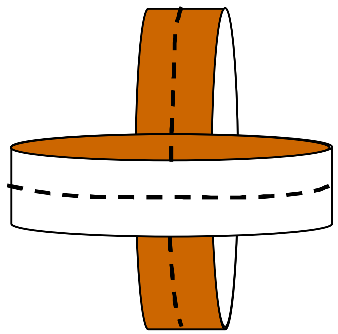
Weiter Experimente mit Zylinderbändern

- Handschellen



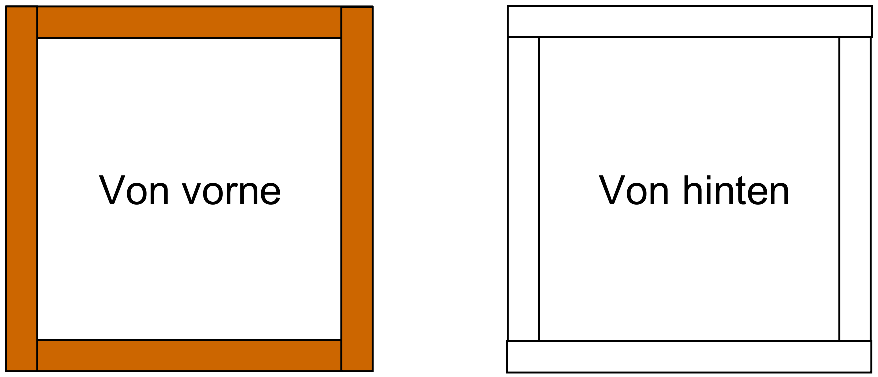
Eine Kante
Zwei Seiten

- Aufschneiden der Handschellen



- Ergebnis

Zwei Kanten
und ***zwei*** Seiten



Experimente mit Möbiusbändern

- Aufschneiden einer Möbiusschleife

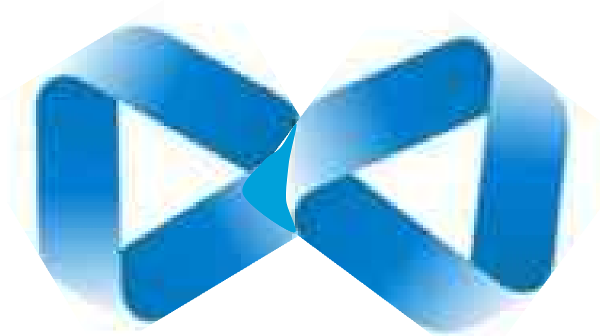
- Wirkung des Aufschneidens
  - Eine neue Kante wird eingebracht
  - Ergebnis kann also kein Möbiusband mehr sein
- Ergebnis: Doppelt verdrehtes Band
  - Zwei Kanten, zwei Seiten
  - Eine Seite grün, die andere Seite blau

Drehsinn von Möbiusbändern/-schleifen

Rechtsgedrehtes Linksgedrehtes

Weiter Experimente mit Möbiusbändern

- Zwei Schleifen 90 Grad versetzt zusammenkleben
- ***Alternative 1:*** gleicher Drehsinn
- ***Alternative 2:*** gegenläufiger Drehsinn
- Dann auseinanderschneiden wie bei den Handschellen



!!! Das Ergebnis wird Euch überraschen !!!

E N D E

Ich danke für Interesse und Aufmerksamkeit