

Relativistische Rechnungen

1.) Krümmung von Bahnen im Gravitationsfeld

Die Newtonformel für die Krümmung einer Bahn im Gravitationsfeld lautet:

$$K = -g/v^2 \quad g = \text{Gravitationsfeldstärke}; v = \text{Geschwindigkeit des Objektes} = dx/dt$$

Die Zeitdilatation sagt

$$dt = dt_r (1 - (v/c)^2)^{-1/2} \quad c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

Damit gilt für v

$$v = (dx/dt_r) (1 - (v/c)^2)^{1/2}$$

Nach v^2 aufgelöst, ergibt sich mit $v_r = dx/dt_r$

$$v^2 = v_r^2 / (1 + (v_r/c)^2)$$

Und damit gilt

$$K = - (g/v_r^2) (1 + (v_r/c)^2)$$

Was man für die relativistische Bahnkrümmung auch in der Literatur findet, z.B. am Ende von <http://www.raumzeit-fuer-alle.de/Exzerpt%20ART.pdf>

Setzt man nun für Licht $v_r = c$, dann erhält man die nach Einstein korrekte Krümmung eines Lichtstrahls im Gravitationsfeld:

$$K = -2g/c^2$$

2.) Kreisbahn eines Lichtstrahls um ein schwarzes Loch

Die Newtonformel für die Geschwindigkeit v eines Objekts auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um eine Masse M lautet:

$$v^2 = GM/r = (r_s/r) (c^2/2) \quad r_s = \text{Schwarzschildradius} = 2GM/c^2, G = \text{Gravitationskonstante}$$

Im Gravitationsfeld gilt für die Zeitdilatation

$$dt = dt_r (1 - r_s/r)^{-1/2}$$

und damit wird mit $v=dx/dt$ und $v_r = dx/dt_r$

$$v^2 = v_r^2 (1 - r_s/r)$$

Mit der ersten Gleichung erhält man

$$v_r^2 (1 - r_s/r) = (r_s/r) (c^2/2)$$

und bei $v_r = c$

$$(1 - r_s/r) = (r_s/r)/2 \quad \text{oder}$$

$$r = (3/2) r_s$$

Das Ergebnis deckt sich mit den Angaben in der Literatur.

Oder einfacher:

Aus der ersten Zeile $r = GM/v^2$ wird $r = GM / (v_r^2(1 - r_s/r))$.

Mit $v_r = c$ und Multiplikation mit $1 - r_s/r$ folgt

$$r - r_s = GM/c^2 = r_s/2 \quad \text{und somit:}$$

$$r = (3/2) r_s$$

Interessant:

Aus der Grundformel $v^2 = GM/r$ folgt für lichtschnelle Bahnen ($v = c$):

a.) Klassische Physik

Direkt aus der Grundformel folgt:

$$r = GM/c^2 = (1/2) r_s$$

b.) Mit spezieller Relativistik

aus $v^2 = v_r^2 / (1 + (v_r/c)^2)$ und $v_r = c$ folgt aus der Grundformel:

$$r = 2 GM /c^2 = (2/2) r_s$$

c.) Mit allgemeiner Relativistik

aus der Rechnung auf der letzten Seite folgt aus der Grundformel:

$$r = 3 GM /c^2 = (3/2) r_s$$